Regras Derivadas e Equivalências Populares

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

Informações Gerais

- Regras derivadas são sequências "auto-contidas" de aplicações das regras básicas de inferência (DN).
- São "atalhos" na descrição de provas, evitando repetições de passos.
- Não há impedimentos para o uso ou mesmo criação de regras derivadas, mas é necessário prová-las.
- Algumas regras derivadas são tão conhecidas quanto as regras básicas.

Modus Tollens

Modus Tollens (mt):

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}$$

1. $p \to q$	premissa
2. $\neg q$	premissa
3. $[p]$	suposição
3.1. q	$e \to$ 1, 3
3.2. $\perp$	abs 2, 3.1
4. $\neg p$	raa 3, 3.2

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (pte): $\dfrac{\varnothing}{\phi \vee \neg\phi}$

1. $[\neg(p \vee \neg p)]$	suposição
1.1. $[p]$	suposição
1.1.1. $p \vee \neg p$	$i \vee$ 1.1
1.1.2. $\bot$	abs 1, 1.1.1
1.2. $\neg p$	rra 1.1, 1.1.2
1.3. $p \vee \neg p$	$i \vee$ 1.2
1.4. $\bot$	abs 1, 1.3
2. $p \vee \neg p$	raa 1, 1.4

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \neg\phi}{\psi}$$

1.	$p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	premissa
3.	$[\neg q]$	suposição
3.1.	$[p]$	suposição
3.1.1.	$\perp$	abs 2, 3.1
3.2.	$[q]$	suposição
3.2.1.	$\perp$	abs 3, 3.2
3.3.	$\perp$	$e\vee$ 1, 3.1, 3.1.1, 3.2, 3.2.1
4.	q	raa 3,3.3

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2): $$\frac{\phi \lor \psi \qquad \neg\phi \lor \chi}{\psi \lor \chi}$$

1.	$p \lor q$	premissa
2.	$\neg p \lor r$	premissa
3.	$[p]$	suposição
3.1.	r	res_1 2, 3
3.2.	$q \lor r$	$i\lor$ 3.1
4.	$[q]$	suposição
4.1.	$q \lor r$	$i\lor$ 4
5.	$q \lor r$	$e\lor$ 1, 3, 3.2, 4, 4.1

Roteiro

Informações Gerais

- Duas fórmulas ϕ e ψ para as quais vale $\phi \vdash \psi$ assim como $\psi \vdash \phi$ são ditas equivalentes (segundo prova).
- Para provar uma equivalência $\phi \dashv\vdash \psi$ é necessário provar tanto a "ida" $\phi \vdash \psi$ quanto a "volta" $\psi \vdash \phi$.
- Assim como as regras derivadas, algumas equivalências são populares pelo seu uso frequente em provas.
- São apresentadas a seguir algumas dessas equivalências, e a prova da ida de cada uma delas. É sugerido como exercício provar cada volta.

Contraposição

Contraposição (cp): $\phi \to \psi \dashv\vdash \neg\psi \to \neg\phi$

1.	$p \to q$	premissa
2.	$[\neg q]$	suposição
2.1.	$[p]$	suposição
2.1.1.	q	$e \to$ 1, 2.1
2.1.2.	$\bot$	abs 2, 2.1.1
2.2.	$\neg p$	rra 2.1, 2.1.2
3.	$\neg q \to \neg p$	$i \to$ 2, 2.2

* Usando *modus tollens*

1.	$p \to q$	premissa
2.	$[\neg q]$	suposição
2.1.	$\neg p$	mt 1, 2
3.	$\neg q \to \neg p$	$i \to$ 3.1, 2.1

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (dm): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

1.	$\neg p \vee \neg q$	premissa
2.	$[p \wedge q]$	suposição
2.1.	$[\neg p]$	suposição
2.1.1.	p	$e\wedge$ 2
2.1.2.	$\perp$	abs 2.1, 2.1.1
2.2.	$[\neg q]$	suposição
2.2.1.	q	$e\wedge$ 2
2.2.2.	$\perp$	abs 2.2, 2.2.1
2.3.	$\perp$	$e\vee\, 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$
3.	$\neg(p \wedge q)$	rra 2, 2.3

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (dm): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

1.	$\neg p \wedge \neg q$	premissa
2.	$[p \vee q]$	suposição
2.1.	$[p]$	suposição
2.1.1.	$\neg p$	$e\wedge 1$
2.1.2.	$\perp$	abs 2.1, 2.1.1
2.2.	$[q]$	suposição
2.2.1.	$\neg q$	$e\wedge 1$
2.2.2.	$\perp$	abs 2.2, 2.2.1
2.3.	$\perp$	$e\vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$
3.	$\neg(p \vee q)$	rra 2, 2.3

Equivalência implicação-disjunção $\neg\phi \lor \psi \dashv\vdash \phi \to \psi$

Equivalência implicação-disjunção (eid): $\neg p \lor q \dashv\vdash p \to q$

1. $\neg p \lor q$	premissa
2. $[p]$	suposição
2.1. q	res_1 1, 2
3. $p \to q$	$i\to 2, 2.1$

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjução sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1. $p \wedge (q \vee r)$ premissa
2. p $e \wedge 1$
3. $(q \vee r)$ $e \wedge 1$
4. $[q]$ suposição

4.1. $p \wedge q$ $i \wedge 2, 4$

4.2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $i \vee 4.1$

5. $[r]$ suposição

5.1. $p \wedge r$ $i \wedge 2, 5$

5.2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $i \vee 5.1$

6. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $e \vee 3, 4, 4.2, 5, 5.2$

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \lor (q \land r) \dashv\vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$

1.	$p \lor (q \land r)$	premissa
2.	$[p]$	suposição
2.1.	$p \lor q$	$i \lor 2$
2.2.	$p \lor r$	$i \lor 2$
2.3.	$(p \lor q) \land (p \lor r)$	$i \land 2.1, 2.2$
3.	$[q \land r]$	suposição
3.1.	q	$e \land 3$
3.2.	r	$e \land 3$
3.3.	$p \lor q$	$i \lor 3.1$
3.4.	$p \lor r$	$i \lor 3.2$
3.5.	$(p \lor q) \land (p \lor r)$	$i \land 3.3, 3.4$
4.	$(p \lor q) \land (p \lor r)$	$e \lor 1, 2, 2.3, 3, 3.5$