Expressões Lógicas

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

O objetivo da lógica em computação

"... é desenvolver linguagens para modelar situações que abordamos enquanto profissionais de computação, de forma a poder raciocinar sobre elas formalmente. Raciocinar sobre situações significa construir argumentos sobre as mesmas; queremos fazer isso formalmente, de forma que os argumentos sejam válidos e possam ser defendidos rigorosamente, ou executados computacionalmente."

Michael Huth e Mark Ryan
Traduzido do livro "Logic in Computer Science"

Exemplo 1: Trem das Onze

1. Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado
2. Mas João chegou no horário
3. Já o trem chegou atrasado
4. Logo, haviam táxis na estação

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Exemplo 2: Maria, olha a chuva!

1. Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou
2. Maria não está molhada
3. Estava chovendo
4. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Um argumento mais formal

- Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado. Mas João chegou no horário. Já o trem chegou atrasado. Logo, haviam táxis na estação.

- Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou. Maria não está molhada. Estava chovendo. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva.

- Se p e não q, então r. Não r. p. Logo, q.

Roteiro

Definição e exemplos

- Proposições: sentenças que podem ser consideradas verdadeiras ou falsas
  - A soma de 2 e 3 é igual a 5
  - Fulano falou mal de Ciclano para Beltrano
  - Quero passar em lógica
- Que sentenças não são proposições?
  - Que a força esteja com você.
  - Já viu que horas são?
  - Pare com esses exemplos agora!

Representação Simbólica

- Proposições em linguagem natural $\Rightarrow$ Fórmulas lógicas
- Menos detalhes desnecessários (abstração)
- Mais facilidade de manipulação
- Foco na argumentação, na combinação de fórmulas

Átomos

- Proposições atômicas são aquelas mais simples, que não podem ser logicamente decompostas.
- Por exemplo: O número 5 é par.
- São representadas por átomos (variáveis): $p, q, r, \ldots$
- Proposições compostas são formadas pela combinação das atômicas
- Por exemplo: 5 é par e 4.5 é negativo

Roteiro

Operadores Lógicos: $\neg$

- *negação / não / not*
- Inverte o valor lógico de uma proposição
  - p: 5 é par
  - $\neg p$: 5 não é par

Operadores Lógicos: $\vee$

- *ou / or / disjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ao menos uma é verdadeira
  - p: 3 é par
  - q: 4 é negativo
  - $p \vee q$: 3 é par ou 4 é negativo

Operadores Lógicos: $\wedge$

- *e / and / conjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ambas são verdadeiras
  - p: o céu é verde
  - q: vacas voam
  - $p \wedge q$: o céu está verde e vacas voam

Operadores Lógicos: $\rightarrow$

- *implicação / se / if*
- Indica que uma proposição é uma consequência lógica de outra
  - p: 1+1 = 10
  - q: 10+10 = 100
  - $p \rightarrow q$: Se 1+1 = 10, então 10+10 = 100
  - p é a premissa, q é a conclusão

Teste seus conhecimentos

- p: Fulana é educada
- q: Fulana é inteligente
- r: Quero me casar com Fulana
- Traduza “Fulana é educada e inteligente”
  - $p \wedge q$
- Traduza “Se fulana é inteligente, quero me casar com ela”
  - $q \rightarrow r$
- Traduza “Fulana é educada mas não quero casar com ela.”
  - $p \wedge \neg r$
- Traduza $q \rightarrow p$
  - Se fulana é inteligente, então ela é educada.

Precedência de Operadores

- $\neg p \land q$?
  - Fulana não é educada mas é inteligente: $(\neg p) \land q$
  - Fulana não é educada e inteligente: $\neg(p \land q)$
- Operadores ordenados por precedência: $\neg, \land, \lor, \rightarrow$
- Implicação é associativa à direita: $p \rightarrow q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Roteiro

Parentização de Expressões Lógicas

- Processo de adição de parênteses a uma expressão
- O objetivo é o total esclarecimento quanto a sua interpretação
- O sentido original deve ser preservado
- Regras gerais para parentização:
  1. Operadores com mais precedência primeiro
  2. Da esquerda para a direita (exceção: implicação, vide slide anterior!)

Exemplo: $a \wedge b \rightarrow d \vee c \rightarrow \neg a \vee b$

$$
\begin{aligned}
&a \wedge b \rightarrow d \vee c \rightarrow \neg a \vee b &\Rightarrow\\
&a \wedge b \rightarrow d \vee c \rightarrow \mathbf{(}\neg a\mathbf{)} \vee b &\Rightarrow\\
&\mathbf{(}a \wedge b\mathbf{)} \rightarrow d \vee c \rightarrow (\neg a) \vee b &\Rightarrow\\
&(a \wedge b) \rightarrow \mathbf{(}d \vee c\mathbf{)} \rightarrow \mathbf{(}(\neg a) \vee b\mathbf{)} &\Rightarrow\\
&(a \wedge b) \rightarrow \mathbf{(}(d \vee c) \rightarrow ((\neg a) \vee b)\mathbf{)} &
\end{aligned}
$$

Resultado: $(a \wedge b) \rightarrow ((d \vee c) \rightarrow ((\neg a) \vee b))$

Exemplo: $\neg(\neg x \vee (y \vee v)) \rightarrow \neg z \vee w \vee u$

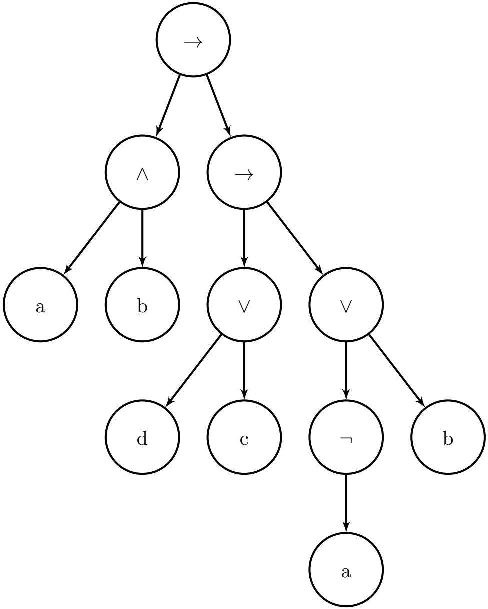
$$\begin{array}{rl}
\neg(\neg x \vee (y \vee v)) \rightarrow \neg z \vee w \vee u & \Rightarrow \\
(\neg((\neg x) \vee (y \vee v))) \rightarrow (\neg z) \vee w \vee u & \Rightarrow \\
(\neg((\neg x) \vee (y \vee v))) \rightarrow (((\neg z) \vee w) \vee u) & \Rightarrow \\
(\neg((\neg x) \vee (y \vee v))) \rightarrow (((\neg z) \vee w) \vee u) &
\end{array}$$

Resultado: $(\neg((\neg x) \vee (y \vee v))) \rightarrow (((\neg z) \vee w) \vee u)$

Árvores de decomposição

- São formas gráficas de representação de expressões
- Não deixam qualquer margem para ambiguidades
- Tornam triviais os processos de interpretação e avaliação

Exemplo: $(a \land b) \to ((d \lor c) \to ((\neg a) \lor b))$



Exemplo: $(\neg((\neg x) \vee (y \vee v))) \to (((\neg z) \vee w) \vee u)$