Expressões e Gramáticas Regulares

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

Noções Básicas

- ERs servem para descrever linguagens regulares.
  - Num paralelo, AFs servem para reconhecer linguagens regulares.
- Comparando com descrições usando notação de conjuntos, ERs são:
  - Mais concisas;
  - Mais manipuláveis;
  - Menos explícitas.
- Dada uma ER $r, L(r)$ é o conjunto de palavras descrito por r.

Definição

Dado um alfabeto Σ, uma ER r sobre este alfabeto pode ser:

- $r = \varnothing$, tal que $L(r) = \varnothing$.
- $r = \lambda$, tal que $L(r) = \{\lambda\}$.
- $r = a \in \Sigma$, tal que $L(r) = \{a\}$.
- $r = s + t$, tal que s e t também são ERs, e $L(r) = L(s) \cup L(t)$.
- $r = st$, tal que s e t também são ERs, e $L(r) = L(s)L(t)$.
- $r = s^*$, tal que $s$também é uma ER, e $L(r) = L(s)^*$.

Exemplos

$r = (0+1)01 \qquad \Rightarrow L(r) = \{001, 101\}$

$r = (0+1)^* \qquad \Rightarrow L(r) = \Sigma^*$

$r = (0+1)^*1(0+1) \qquad \Rightarrow L(r) = \{w \in \Sigma^* : w_{|w|-1} = 1\}$

$r = 0 + 10^* = 0 + (1(0^*)) \qquad \Rightarrow L(r) = \{0, 1, 10, 100, 1000, \dots\}$

$r = (0+1)^*1(0+1)^* = 0^*1(0+1)^* \qquad \Rightarrow L(r) = \{w \in \Sigma^* : \exists i, w_i = 1\}$

Roteiro

ER $\Rightarrow$ AF

Para construir um AF que reconheça a linguagem denotada por uma ER, considere que:

- É trivial construir AFs cujas linguagens sejam $\varnothing, \{\lambda\}$ ou $\{a\} \subset \Sigma$;
- Dados AFs M e M', sabemos construir AFs que reconheçam $L(M) \cup L(M'), L(M)L(M')$ e $L(M)^*$;
- Sendo assim, podemos quebrar as ERs em partes cujos respectivos AFs sejam definidos facilmente, e depois juntá-los.

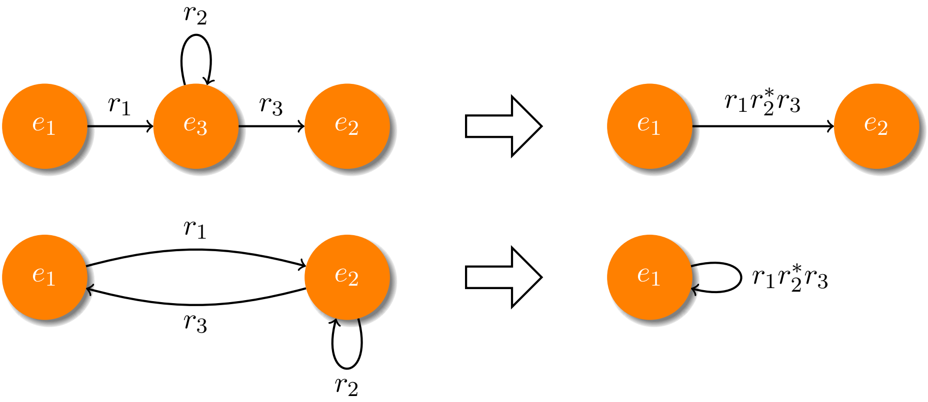
Exemplo: $(0 + \lambda)(10 + 1)^*$.

AFD $\Rightarrow$ ER (1)

- Seja um AFD $M = (E, \Sigma, \delta, i, \{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$.
- $L(M) = \bigcup_k L_k(M), \; L_k(M) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(i, w) = f_k\}$.
- Então, se r_k é a ER referente a $L_k(M)$, a ER referente a $L(M)$ é $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$.
- Assim sendo, o alvo é definir cada r_k separadamente.

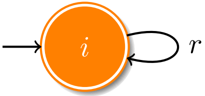
AFD $\Rightarrow$ ER (2)

Procedimento: "contrair" os vértices do conjunto $E \setminus \{i, f_k\}$.

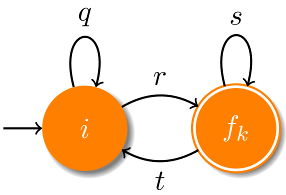


AFD $\Rightarrow$ ER (3)

Finalização: ERs referentes às duas possíveis situações finais.



$$r^*$$



$$q^*r(s + tq^*r)^*$$

- Se uma transição q, r, s, ou t não estiver presente, substituir por $\varnothing$.
- Simplifique a ER obtida usando a equivalência $\varnothing A = A\varnothing = \varnothing$

Exercícios sugeridos

- Livro NJV, versão pré-impressão em PDF

- Página 124; questões 2, 3, 5

Roteiro

Noções básicas

- Toda gramática é uma tupla (V, Σ, R, P), em que:
  - V é um conjunto de variáveis;
  - Σ é um alfabeto;
  - $R \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ é um conjunto de regras;
  - $P \in V$ é uma variável de partida.
- Toda gramática gera um conjunto de palavras, uma linguagem.
- O processo de geração de uma palavra é chamado derivação.
- Em tal processo ocorre a expansão das variáveis, pela aplicação das regras da gramática.

Exemplo

- $L = (01)^*$.
- Gramática G, tal que $L(G) = L$?
- $G = (\{A\}, \{0,1\}, R, A)$. R?
- $R = \{A \rightarrow 01A, A \rightarrow \lambda\}$.
- Uma derivação: $A \Rightarrow 01A \Rightarrow 0101A \Rightarrow 010101A \Rightarrow 010101$.

Gramáticas regulares (GRs)

- GRs são gramáticas que geram linguagens regulares (LRs).
  - AFs para reconhecer, ERs para descrever.
- Existem 2 tipos de GR, segundo a forma das suas regras:
  - Gramáticas lineares à direita (GLDs): $V \to (\Sigma^*)(V \cup \{\lambda\})$;
  - Gramáticas lineares à esquerda (GLEs): $V \to (V \cup \{\lambda\})(\Sigma^*)$.

Gramáticas lineares unitárias (GLUs)

- GLUs são um subconjunto das GRs, capazes de gerar todas as LRs.
- Ou seja, para toda GR R existe uma GLU U tal que $L(R) = L(U)$.
- Há GLUs à direita (i.e., $V \to (\Sigma \cup \{\lambda\})(V \cup \{\lambda\})$) e à esquerda.
- Para toda GLU à direita há uma GLU à esquerda equivalente, e v.v.
- Por conta das equivalências, nosso estudo é focado em GLUs à direita.

Exemplo

- $L = \{w \in \{0,1\}^* : 01$ não é subpalavra de $w\}$.
- GR $G = (\{A, B\}, \{0, 1\}, R, A), L(G) = L$. R?
- $A \rightarrow 0B|1A|\lambda$
- $B \rightarrow 0B|\lambda$

Roteiro

GR $\Rightarrow$ AF

- Seja uma GR $G = (V, \Sigma, R, P)$.
- Um AFN $M = (E, \Sigma, \delta, \{P\}, F)$ é tal que $L(M) = L(G)$. E, δ, F?
- $E = V \cup \{s\}$.
- Para cada regra, $X \to aY$, $Y \in \delta(X, a)$.
- Para cada regra, $X \to a$, $s \in \delta(X, a)$.
- Para cada regra, $X \to \lambda$, $X \in F$.
- $s \in F$.

AF $\Rightarrow$ GR

- Seja um AFN $M = (E, \Sigma, \delta, \{i\}, F)$.
- Seja uma GR $G = (E, \Sigma, R, i)$ é tal que $L(M) = L(G)$. R?
- $R = \{e \rightarrow ae' : e' \in \delta(e, a)\} \cup \{e \rightarrow \lambda : e \in F\}$.

Exercícios sugeridos

- Livro NJV, versão pré-impressão em PDF
- Página 129; questões 1, 3, 7