Propriedades de Fechamento e Lema do Bombeamento

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

1 Propriedades de Fechamento

2 Lema do Bombeamento

Roteiro

1 Propriedades de Fechamento

2 Lema do Bombeamento

Definições

- Seja $\mathcal{L}$ um conjunto qualquer.
  - (por exemplo, o conjunto de todas as linguagens aceitas por AFs)
- Seja $\mathcal{O}$ uma operação qualquer (por exemplo, união).
- Diz-se que $\mathcal{L}$ é fechada sob O se a aplicação de O a elementos de $\mathcal{L}$ sempre resulta em elementos de $\mathcal{L}$.
- O conjunto de linguagens regulares é fechado sob algumas operações, conforme mostrado a seguir.

Complementação

- Seja $M = (E, \Sigma, \delta, i, F)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M)$.
- Como definir um AF M' tal que $L(M') = \overline{L(M)}$?
- AFD $M' = (E, \Sigma, \delta, i, E \setminus F)$.

Interseção

- Seja $M_1 = (E_1, \Sigma, \delta_1, i_1, F_1)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M_1)$.
- Seja $M_2 = (E_2, \Sigma, \delta_2, i_2, F_2)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M_2)$.
- Como definir um AF M' tal que $L(M') = L(M_1) \cap L(M_2)$?
- AFD $M' = (E_1 \times E_2, \Sigma, \delta', (i_1, i_2), F_1 \times F_2)$.
- $\delta'((e_1, e_2), a) = (\delta_1(e_1, a), \delta_2(e_2, a))$.

União

- Seja $M_1 = (E_1, \Sigma, \delta_1, i_1, F_1)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M_1)$.
- Seja $M_2 = (E_2, \Sigma, \delta_2, i_2, F_2)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M_2)$.
- Como definir um AF M' tal que $L(M') = L(M_1) \cup L(M_2)$?
- AFD $M' = (E_1 \times E_2, \Sigma, \delta', (i_1, i_2), F')$.
- $\delta'((e_1, e_2), a) = (\delta_1(e_1, a), \delta_2(e_2, a))$.
- $F' = (F_1 \times E_2) \cup (E_1 \times F_2)$

Concatenação

- Seja $M_1 = (E_1, \Sigma_1, \delta_1, i_1, F_1)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M_1)$.
- Seja $M_2 = (E_2, \Sigma_2, \delta_2, i_2, F_2)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M_2)$.
- Como definir um AF M' tal que $L(M') = L(M_1)L(M_2)$?
- AFNλ $M' = (E_1 \cup E_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta', i_1, F_2)$.
- $\delta'(e, a) = \{\delta_1(e, a)\}, \forall e \in E_1, a \in \Sigma_1$.
- $\delta'(e, a) = \{\delta_2(e, a)\}, \forall e \in E_2, a \in \Sigma_2$.
- $\delta'(e, \lambda) = \{i_2\}, \forall e \in F_1$.

Fecho de Kleene

- Seja $M = (E, \Sigma, \delta, i, F)$ um AFD, cuja linguagem é $L(M)$.
- Como definir um AF M' tal que $L(M') = L(M)^*$?
- AFNλ $M' = (E \cup \{i'\}, \Sigma, \delta', i', F \cup \{i'\})$.
- $\delta'(e, a) = \{\delta(e, a)\}, \forall e \in E, a \in \Sigma$.
- $\delta'(i', \lambda) = \{i\}$.
- $\delta'(e, \lambda) = \{i'\}, \forall e \in F$.

Exercícios sugeridos

- Livro NJV, versão pré-impressão em PDF
- Página 88; questão 12
- Página 102; questão 12
- Página 109; questões 4, 5, 7

Roteiro

1 Propriedades de Fechamento

2 Lema do Bombeamento

Motivação

- As linguagens reconhecidas por AFs são ditas regulares.
- Nem toda linguagem é regular.
  - Por exemplo, $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Avaliar se uma linguagem a ser reconhecida é ou não regular antes de tentar definir um AF que a reconheça pode evitar trabalho inútil.
- Tal avaliação pode ser feita utilizando propriedades simples derivadas da definição de AFs.

Intuição (1)

- Seja L uma linguagem qualquer.
- Deseja-se determinar um AF que reconheça L, se isto for possível.
  - Se L é finita, isto não só é possível como é trivial. (por que?)
- Considere que L é infinita. Ou seja, $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists w \in L)[|w| > x]$.
  - L poderia ser infinita se $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall w \in L)[|w| \leq x]$?

Intuição (2)

- Suponha que exista um AFD $M = (E, \Sigma, \delta, i, F)$ que reconheça L.
- Se $w \in L \wedge |w| > |E|$, não há como fazer a computação de w sem visitar algum estado de M mais de uma vez.
    - Princípio das gavetas, ou do pombal, ou de Dirichlet.
- Consequentemente, há algum ciclo em M.

Intuição (3)

- Seja $w = xyz$ uma decomposição tal que x, y e z são as palavras consumidas antes, durante e após o ciclo, respectivamente.
- Nota-se que $(\forall n \in \mathbb{N})[\hat{\delta}(i, w) = \hat{\delta}(i, xy^n z)]$.
  - n é o número de repetições do ciclo.
- Logo, se $\hat{\delta}(i, w) \in F$, então $\hat{\delta}(i, xy^n z) \in F$.
- Ou seja, se $w \in L$, então $xy^n z \in L$.
- Se esta última implicação for falsa, não há AFD que reconheça L.
  - M não pode reconhecer w e não reconhecer $xy^n z$ simultaneamente.

Lema do Bombeamento (para linguagens regulares)

Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$ tal que para qualquer palavra $w \in L, |w| \geq k$, existem x, y e z que satisfazem as seguintes condições:

1. $w = xyz$;
2. $|xy| \leq k$;
3. $y \neq \lambda$;
4. $(\forall n \in \mathbb{N})[xy^n z \in L]$.

Informações Adicionais

- Toda linguagem regular segue o Lema do Bombeamento (LB): $R \to LB$.
- Todavia, a recíproca não é verdadeira: $\neg(LB \to R)$.
- Para mostrar que uma linguagem não é regular basta mostrar que apenas uma de suas palavras não possui nenhuma subpalavra bombeável, dentre todas as possíveis.
- É prático e usual pensar que $k = |E|$.

Exemplo 1: $L = \{0^m 1^m : m \geq 0\}$

- Seja $w = 0^k 1^k$, sendo k a constante do LB.
- Para $w = xyz$, $x = 0^i, y = 0^j$ e $z = 0^{k-i-j} 1^k$.
- $xy^n z = 0^{i+jn+k-i-j} 1^k = 0^{k+j(n-1)} 1^k$.
- Para que $xy^n z \in L$, $k + j(n-1) = k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Porém, a equação só vale se $j = 0$.
- Isso contradiz a condição 3 do LB ($y \neq \lambda$).
- Logo, L não é regular.

Exemplo 2: $L = \{uu : u \in \{0,1\}^*\}$

- Seja $w = 0^k 1 0^k 1$, sendo k a constante do LB.
- Para $w = xyz$, $x = 0^i, y = 0^j$ e $z = 0^{k-i-j} 1 0^k 1$.
- $xy^n z = 0^{i+jn+k-i-j} 1 0^k 1 = 0^{k+j(n-1)} 1 0^k 1$.
- Para que $xy^n z \in L$, $k + j(n-1) = k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Porém, a equação só vale se $j = 0$.
- Isso contradiz a condição 3 do LB ($y \neq \lambda$).
- Logo, L não é regular.

Exercícios sugeridos

- Livro NJV, versão pré-impressão em PDF
- Página 108; questão 3
- Página 135; questão 9