Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

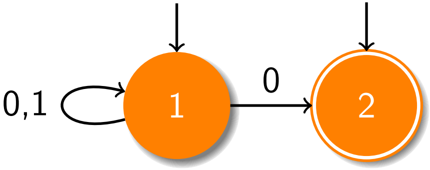
Roteiro

Definição

Um AFN é definido de forma semelhante a um AFD: uma quíntupla, $(E, \Sigma, \delta, I, F)$, em que:

- E é um conjunto de estados;
- Σ é um alfabeto;
- $\delta : E \times \Sigma \to \mathcal{P}(E)$ é a função de transição;
- $I, I \subset E, I \neq \varnothing$, é o conjunto de estados iniciais;
- $F, F \subset E$, é o conjunto de estados finais.

Exemplo



- $E = \{1, 2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $I = \{1, 2\}$
- $F = \{2\}$

δ	0	1
1	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
2	$\varnothing$	$\varnothing$

AFDs, AFNs e Não-Determinismo

É importante notar duas diferenças de AFNs para AFDs, que representam o caráter não-determinístico dos primeiros:

- Um AFN pode ter um ou mais estados iniciais, enquanto um AFD tem apenas 1 estado inicial;
- Os elementos do contradomínio da função de transição de um AFN são conjuntos de estados, enquanto de um AFD são estados apenas.

$\delta(e, a) = \varnothing$?

- No contexto de AFNs, $\delta(e, a)$ é o conjunto de estados alcançados por transição de e sob a.
- Logo, $\delta(e, a) = \varnothing$ se e somente se não há transições sob o símbolo a partindo de e.
- AFNs dispensam o uso de sumidouros, já que a função de transição permite indicar a ausência de transições de um estado sob um símbolo.
- Se $\forall (e, a) \in E \times \Sigma, |\delta(e, a)| \leq 1$, o referido AFN poderia ser representado como um AFD. (Por que?)

AFNs e Linguagens

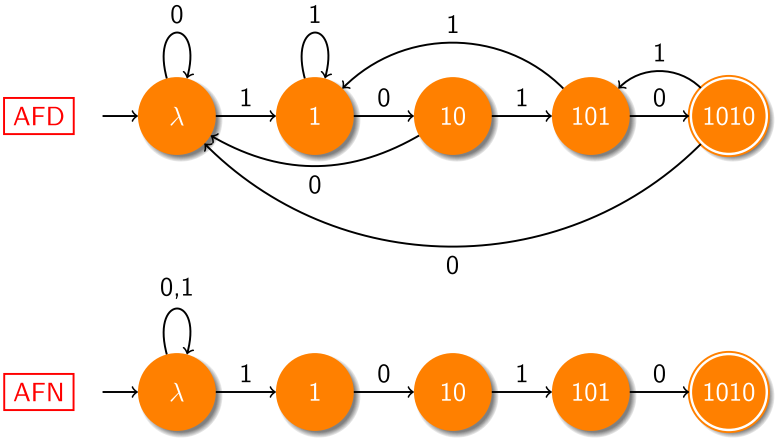
- Seja $\hat{\delta} : \mathcal{P}(E) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(E)$ uma função de transição estendida de um AFN qualquer, tal que:
    - $\hat{\delta}(\varnothing, w) = \varnothing$, para todo $w \in \Sigma^*$;
    - $\hat{\delta}(A, \lambda) = A$, para todo $A \subseteq E$;
    - $\hat{\delta}(A, aw) = \hat{\delta}(\bigcup_{e \in A} \delta(e, a), w)$.
- Usando a definição de $\hat{\delta}$, a linguagem aceita por um AFN $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$ é o conjunto

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \varnothing \right\} .$$

Por que usar AFNs?

- AFDs e AFNs são equivalentes: para todo AFN, há um AFD correspondente; e todo AFD é um “AFN determinístico”.
- Ainda assim, AFNs ainda se mostram úteis ante a AFDs por permitirem descrições mais simples e claras de algumas ideias.
- Devido a isso, determinar um AFN para chegar ao seu AFD correspondente é eventualmente mais interessante que determinar o AFD diretamente.
- Por exemplo, como seriam um AFD e um AFN que aceitem a linguagem $\{0,1\}^*\{1010\}$?

$\{0,1\}^*\{1010\}$: AFD e AFN



Exercício

- Considere a linguagem

$$L_i = \{w \in \{0,1\}^* : |w| \geq i \wedge w_{|w|-i+1} = 1\}, i > 0 \ .$$

- Determine um AFD D_i e um AFN N_i tal que $L(D_i) = L(N_i) = L_i$, para $i = 1, 2, 3$.
- Indique o número de estados de D_i e N_i em função de i.
- A comparação desses números diz algo sobre a importância de AFNs, apesar da sua equivalência com AFDs?

Roteiro

AFD $\rightarrow$ AFN: Intuição

- Um AFN $N = (E', \Sigma', \delta', I, F')$ equivalente a um AFD $D = (E, \Sigma, \delta, i, F)$ qualquer pode ser determinado baseando-se na ideia de que um AFD é como um "AFN determinístico":
  - $E' = E, \Sigma' = \Sigma, \delta'(e, a) = \{\delta(e, a)\}, I = \{i\}, F' = F$.
  - Isso pode ser provado! :)
  - Provar a equivalência de D e N, $L(D) = L(N)$, é provar que $\forall w, w \in L(D) \leftrightarrow w \in L(N)$.

AFN $\rightarrow$ AFD: Intuição

- Um AFD $D = (E', \Sigma', \delta', i, F')$ equivalente a um AFN $N = (E, \Sigma, \delta, I, F)$ qualquer realizaria, determinística e sincronicamente, computações "paralelas" do AFN.
- Logo, os estados desse AFD seriam conjuntos de estados do AFN (já que um AFN permite estar em mais de um estado ao mesmo tempo).
- O estado inicial de D seria o próprio conjunto de estados iniciais de N.
- Os conjuntos de estados de N com pelo menos 1 estado final seriam os estados finais de D.
- Assim sendo: $E' \subseteq \mathcal{P}(E), \Sigma' = \Sigma, i = I, F' = \{X \subseteq E : X \cap F \neq \varnothing\}$.
- Por fim, $\delta'(X, a) = \bigcup_{e \in X} \delta(e, a)$, para $X \subseteq E$.

Exercício

1. Considere um AFN $N = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 1\}, \delta, \{1, 2\}, \{5\})$, cuja matriz de transições é mostrada a seguir.

δ	0	1
1	$\{2\}$	$\varnothing$
2	$\{3\}$	$\varnothing$
3	$\varnothing$	$\{4\}$
4	$\varnothing$	$\{3, 5\}$
5	$\varnothing$	$\varnothing$

2. Desenhe o diagrama referente a este AFN.

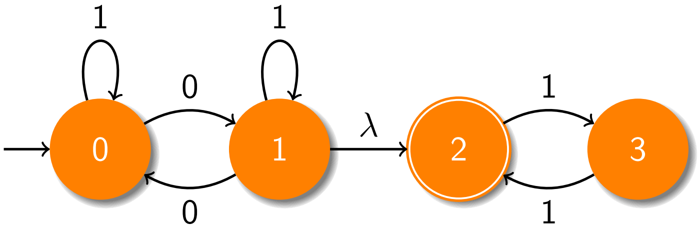
3. Determine o AFD equivalente a este AFN.

Roteiro

AFNλs: Definição

- Um autômato finito não determinístico com transições λ (AFNλ) é definido de forma semelhante a um AFN.
- A diferença entre ambos está na função de transição, que para AFNλs é descrita como: $\delta : E \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(E)$.
- Ou seja, num AFNλ é possível a realização de transições sem que qualquer símbolo da seja consumido.
- Mesmo com essa capacidade extra, AFNλs são equivalentes a AFNs.
- Assim sendo, a utilidade de AFNλs é baseada apenas na possibilidade de obter modelos mais claros e objetivos do que usando AFNs.

Exemplo



- $E = \{0, 1, 2, 3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $I = \{0\}$
- $F = \{2\}$

δ	0	1	λ
0	$\{1\}$	$\{0\}$	$\varnothing$
1	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
2	$\varnothing$	$\{3\}$	$\varnothing$
3	$\varnothing$	$\{2\}$	$\varnothing$

Função fecho λ, $f\lambda$

- Antes de falar na linguagem aceita por um AFNλ $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$, é interessante definir a função fecho λ, $f\lambda : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$.
- Essa função é definida recursivamente, conforme mostrado a seguir, para um conjunto de estados X qualquer, $X \subseteq E$:
  - $X \subseteq f\lambda(X)$;
  - Se $e \in f\lambda(X)$, então $\delta(e, \lambda) \in f\lambda(X)$.
- Numa descrição em alto nível, $f\lambda(X)$ é o conjunto de todos os estados alcançáveis a partir dos estados em X usando apenas transições sob λ, sem que símbolos sejam consumidos.

AFNλs e Linguagens

- Seja $\hat{\delta} : \mathcal{P}(E) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(E)$ uma função de transição estendida de um AFNλ qualquer, tal que:
  - $\hat{\delta}(\varnothing, w) = \varnothing$, para todo $w \in \Sigma^*$;
  - $\hat{\delta}(A, \lambda) = f\lambda(A)$, para todo $A \subseteq E$;
  - $\hat{\delta}(A, aw) = \hat{\delta}(\bigcup_{e \in f\lambda(A)} \delta(e, a), w)$.
- De forma semelhante a AFNs, a linguagem aceita por um AFNλ $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$ é o conjunto

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \varnothing \right\} .$$

Equivalência entre AFNλs e AFNs

- Assim como AFDs são como um caso particular de AFNs, é possível ver os próprios ANFs como um caso particular de AFNλs.
- Sendo assim, a equivalência entre AFNλs e AFNs pode ser comprovada apenas obtendo AFNs correspondentes a todos AFNλs.
- Considere então um AFN$\lambda M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$. Um AFN equivalente seria $N = (E, \Sigma, \delta', I', F)$, tal que $I' = f\lambda(I)$ e $\delta'(e, a) = f\lambda(\delta(e, a))$.
- Para provar que $L(M) = L(N)$, mostrar-se que $\hat{\delta}'(I', w) = \hat{\delta}(I, w)$.

Exercício

1. Considere um AFNλ $M = (\{1, 2, 2', 3, 3'\}, \{0, 1\}, \delta, \{1\}, \{2, 3\})$, cuja matriz de transições é mostrada a seguir.

δ	0	1	λ
1	$\varnothing$	$\{3\}$	$\{2\}$
2	$\{2'\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
2'	$\{2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
3	$\varnothing$	$\{3'\}$	$\varnothing$
3'	$\varnothing$	$\{3\}$	$\varnothing$

2. Desenhe o diagrama referente a este AFNλ.

3. Determine o AFN equivalente a este AFNλ.

Mais exercícios

- Livro NJV, versão pré-impressão em PDF
- Página 101; questões 1, 2, 4, 5, 6, 7, 13, 14